



TITLE:

泡の流れのシミュレーション (複雑流体の数理)

AUTHOR(S):

奥蘭, 透

CITATION:

奥蘭, 透. 泡の流れのシミュレーション (複雑流体の数理). 数理解析研究所講究録 1999, 1081: 84-99

ISSUE DATE:

1999-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/62729>

RIGHT:

泡の流れのシミュレーション

名古屋大学大学院工学研究科 奥蘭 透 (Tohru Okuzono)

1 はじめに

多数の泡が集まってできた柔らかい物質をフォーム (foam) と呼ぶ。ビールの泡やシェービングフォームを想像してもらえば良い。フォームを形成するひとつひとつの泡はセル状の形をなし、それらを隔てる液体二重膜はネットワーク状のパターンを形成する。このようなパターンはセルパターンと呼ばれ、ある程度乱れた (多分散の) 構造をとることが多い。

フォームはそのまま放置すればゆっくりとパターンの粗大化が起こり、セルの平均サイズは時間とともに大きくなる。このようなパターン成長を主に律速しているのは、セル内部の気体の (膜を通しての) 拡散過程である。

シェービングクリームを手にとると液体のように流れず形を保持していることからわかるように、フォームは小さな変形に対しては弾性体のように振舞う。一方、フォームは容易に変形可能であり、少し大きな力を加え続けるとあたかも流体のように“流れる”。このような力学的性質は塑性と呼ばれ、その流動現象は塑性流動と呼ばれる。通常、このような塑性流動に特徴的は時間スケールは上述の拡散過程の時間スケールに比べて非常に短く、液体膜中の粘性流体の運動が重要なエネルギーの散逸過程となる。

以上のような物理過程はセルパターンという複雑な幾何学的構造の下で起こる。したがって、パターン全体の時間発展、統計量、あるいはマクロな応答を知ることは非常に複雑な多体問題となる。我々はこれに対し簡単な描像の下にモデル化を行い、計算機シミュレーションを行う。そうすることによって、今まで見えなかったことが明らかになり、現象への理解を深めることができる。

2 モデル

本稿では簡単のため 2 次元のモデルに限定する。界面がネットワーク状につながったパターン (セルパターン) の時間発展を記述するための変数の選び方はいろいろ考えられる。我々は、非常に単純に、ネットワークの頂点の座標とそれらのつながりの情報のみに着目する。即ち、系の時間発展は頂点の運

動方程式と、頂点の衝突過程に対応するトポロジカルプロセスとで記述される。ひとつの頂点は常に3つの界面によって共有される点であると仮定すれば(界面エネルギーにより4つ以上の界面によって共有される点是不安定である)、トポロジカルプロセスは図1に示すような二種類の素過程(T1 および T2 プロセスと呼ばれる)からなる。実際のシミュレーションでは、ある辺の長さがある一定の小さな距離以下になるとそのまわりのネットワークのつながりの状況によって T1 あるいは T2 プロセスが起きる。

では、頂点の運動方程式はどのように決まるのか。以下でそれを考察する。

2.1 成長過程の動力学[1]

今、滑らかな界面を考え、界面の局所的な運動が曲率駆動型であるとする。即ち、界面の位置 a での法線方向の界面の速度を $v(a)$ 、平均曲率を $\kappa(a)$ とすると、

$$v(a) = L\kappa(a) \quad (1)$$

ここで、 L は運動学係数(正の定数)である。この式は形式的に次のように書き換えることができる。

$$\frac{\delta \mathcal{R}}{\delta v(a)} + \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q(a)} = 0 \quad (2)$$

$$\mathcal{R} \equiv \frac{\sigma}{2L} \int da v^2(a) \quad \mathcal{H} \equiv \sigma \int da \quad (3)$$

ここで、 σ は界面張力、 $q(a)$ は位置 a での界面の法線方向への変位である。また、 \mathcal{R} は散逸関数、 \mathcal{H} は界面の自由エネルギーである。したがって、(2) は摩擦力とポテンシャルによる力の釣合の式である。

セルパターンの場合に頂点の運動方程式を得るため、頂点と頂点を結ぶ界面を直線で近似する。この場合ダイナミカルな変数は頂点の位置 $\{\mathbf{r}_i\}$ と速度 $\{\mathbf{v}_i\}$ である。ここで、 $i = 1, 2, \dots$ は頂点の番号を表す。これらの変数を用いて、頂点の運動方程式は (2)、(3) に対応して、

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{v}_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}_i} = 0 \quad (4)$$

$$\mathcal{R} \equiv \frac{1}{2} \sum_{ij} \mathbf{v}_i \cdot \mathcal{D}_{ij} \cdot \mathbf{v}_j \quad \mathcal{H} \equiv \sigma \sum_{\langle ij \rangle} |\mathbf{r}_{ij}| \quad (5)$$

と書ける。ここで、 $\mathbf{r}_{ij} \equiv \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ 、 $\sum_{\langle ij \rangle}$ はすべての辺 $\langle ij \rangle$ について和をとることを意味する。また、テンソル \mathcal{D}_{ij} の具体的な表式については文献[1]を参照していただきたい。(4) は頂点に働く力の釣合の式であると考えることができる。

2.2 流動現象のモデル [2, 3, 4]

気体相 (分散相) の体積分率が 1 に近いフォームを考える。このような系の流動現象においては、気体を非粘性、非圧縮とすれば、液体二重膜中の流体の運動による粘性散逸が重要なエネルギー散逸過程となる。特に Plateau border と呼ばれる頂点近傍の領域での散逸が重要であり、この領域が二重膜に沿って速さ U で動くときのエネルギー散逸率はキャピラリー数が小さい場合には、 $U^{5/3}$ に比例することが流体力学的計算からわかる [5]。

液体二重膜中の粘性散逸は頂点の運動に対して余分の摩擦力を生じる。したがって、頂点の運動方程式は次のように変更されるであろう。

$$\mathbf{f}_i^D + \mathbf{f}_i^P = -\sigma \sum_j^{(i)} \mathbf{r}_{ij} / |\mathbf{r}_{ij}| \quad (6)$$

ここで、 \mathbf{f}_i^D は (4) の第 1 項を表し、 \mathbf{f}_i^P は新たに加わった粘性散逸による摩擦力である。和 $\sum_j^{(i)}$ は頂点 i とつながっている 3 つの頂点 j についてとる。

第 1 節でも述べたように、上で議論した流体運動の時間スケールは、拡散によってパターンが粗大化する時間スケールに比べて非常に短い。したがって、泡の流動現象に興味があるならば、その時間スケールではパターンの粗大化は起こらないとしてもよいであろう。そこで我々は、パターンの粗大化に関する摩擦力 \mathbf{f}_i^D を考慮するかわりに、パターンの粗大化が起こらない、即ち各セルの面積が時間とともに変化しないという拘束を課す。したがって、頂点の運動方程式は次のように書ける。

$$\mathbf{f}_i^P + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} A_{\alpha} = -\sigma \sum_j^{(i)} \mathbf{r}_{ij} / |\mathbf{r}_{ij}| \quad (7)$$

ここで、 A_{α} はセル α の面積、 λ_{α} は Lagrange の未定乗数で、条件

$$\frac{d}{dt} A_{\alpha} = 0 \quad (8)$$

から決定される。

次に、 \mathbf{f}_i^P の表式を得るため、各々の Plateau border での粘性散逸が独立に起こると仮定し、系全体での粘性散逸率 Q を

$$Q = \sum_i \sum_j^{(i)} Q_{ij} \quad (9)$$

$$Q_{ij} \equiv \mathbf{v}_i^{(j)} \cdot \mathbf{f}_{ij}^P \quad (10)$$

と書く。ここで、 \mathbf{f}_{ij}^P は頂点 i に働く辺 $\langle ij \rangle$ に沿う摩擦力である。また、

$$\mathbf{v}_i^{(j)} \equiv \mathbf{v}_i - \mathbf{u}_{ij} \quad (11)$$

であり、 \mathbf{u}_{ij} は頂点 i から遠く離れた辺 $\langle ij \rangle$ 上の流体の速度である。 Q_{ij} は辺 $\langle ij \rangle$ が伸び縮みするときのエネルギー散逸率であり、それに関係した摩擦力が \mathbf{f}_{ij}^P である。流体力学的な計算の結果より

$$Q_{ij} \propto |\mathbf{v}_i^{(j)} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ij}|^{5/3} \quad (12)$$

であるから、 $\hat{\mathbf{r}}_{ij}$ 方向の摩擦力はその方向の速度の $2/3$ 乗に比例する:

$$\mathbf{f}_{ij}^P \propto |\mathbf{v}_i^{(j)} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ij}|^{2/3} \hat{\mathbf{r}}_{ij} \quad (13)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{r}}_{ij} \equiv \mathbf{r}_{ij}/|\mathbf{r}_{ij}|$ 。

ところで、 \mathbf{u}_{ij} はまだ決定されておらず任意性が残っている。これを解決するため次の2つの方法を考える。

方法 I 平均流 $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ (例えば shear flow 等) を与え、

$$\mathbf{u}_{ij} = \mathbf{u}(\mathbf{r}_i) \quad (14)$$

とする。このとき、(10) は

$$Q = \sum_i [\mathbf{v}_i - \mathbf{u}(\mathbf{r}_i)] \cdot \mathbf{f}_i^P \quad (15)$$

となり、

$$\mathbf{f}_i^P = \sum_j^{(i)} \mathbf{f}_{ij}^P \quad (16)$$

は、頂点 i の速度の平均流からのずれに対する摩擦力である。

方法 II 対称性 $\mathbf{u}_{ij} = \mathbf{u}_{ji}$ 、 $\mathbf{f}_{ij}^P = -\mathbf{f}_{ji}^P$ を仮定すると、 Q は

$$\begin{aligned} Q &= \sum_i \sum_j^{(i)} (\mathbf{v}_i - \mathbf{u}_{ij}) \cdot \mathbf{f}_{ij}^P \\ &= \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{f}_i^P \end{aligned} \quad (17)$$

と書ける。したがって、頂点 i に働く摩擦力は (16) の形で与えられる。ただし f_{ij}^P は v_i および v_j の関数で上の対称性を満たすようなものである。上の対称性に加え、頂点の運動方程式 (7) がガリレイ変換に対して不変であることを要請すれば

$$u_{ij} = \frac{1}{2}(v_i + v_j) \quad (18)$$

が得られる。

3 シミュレーションの結果

2.1 節のモデルによるシミュレーションから得られたパターンを初期状態とし、Lees-Edwards の周期境界条件によって単純ずり流を与え、シミュレーションを行った。以下では前節の方法 II によるシミュレーションの結果を列挙する。シミュレーションの詳細は文献 [3] を参照されたい。

図 2 初期状態 (a) および変形中 (b) の系のパターンである。

図 3 および 4 単位面積あたりの界面エネルギー $E(t)$ およびずり応力 $\tau_{xy}(t)$ の時間変化を示す。横軸は何れもずり速度 $\dot{\gamma}$ の逆数でスケールした時間 $\dot{\gamma}t$ 即ちずり歪みである。微小な変形領域では弾性的振舞いをしているが、大変形領域 ($\dot{\gamma}t > 1$) では非常に特異な振舞いをしていることがわかる。

図 5 図 4 の一部を拡大したものである。図中に描かれている縦棒はトポロジカルプロセス (T1) が起こった時刻を示している。T1 プロセスが起こることによって応力が解放されていることがわかる。ここには示されていないがエネルギー $E(t)$ についてもほぼ同様の振舞いをする。

図 6 セルの流れの様子を図示したものである。右側の棒グラフにはセルの速度の x 成分が表示してある。微小変形領域ではきれいな shear flow が形成されているが (a)、大変形領域でエネルギーを放出しているときには乱れた速度場が形成されている (b)。大変形領域においてもエネルギーを蓄積しているときには速度場は乱れていない (c)。

このように大変形領域においては、乱れた速度場を伴ったエネルギーの解放過程が T1 プロセスによって誘起され、このような過程は間欠的に繰り返される。我々はこのエネルギー解放の過程を泡の系における“なだれ (avalanche)”現象と名付けた。

図 7 1 回のなだれで解放された界面エネルギー s をそのなだれのサイズとしたとき、なだれのサイズ分布 $P(s)$ を両対数プロットしたものである。 $P(s)$ は巾分布していることがわかる。

図 8 時系列 $E(t)$ に対するパワースペクトルの両対数プロットである。これも巾則に従っていることがわかる。

図 9 T1 プロセスが起こった場所を示したものである。この図では 1 回の run で起こったすべての T1 プロセスの位置を重ね書きしている。これを見る限り、ほぼ一様な場所で起こっている。しかしながら、いくつかのなだれについて起こった T1 プロセスを取り出してみると図 10 のようになる。同一のなだれで起こった T1 プロセスは同じシンボルで示してある。これを見ると、1 回のなだれで起こる T1 プロセスの位置には相関があることがわかる。

Acknowledgments 本研究は中部大学 川崎恭治 教授との共同研究です。

References

- [1] T. Okuzono and K. Kawasaki, Trends in Stat. Phys. **1**, 65 (1994).
- [2] T. Okuzono, K. Kawasaki, and T. Nagai, J. Rheol. NY **37**, 571 (1993).
- [3] T. Okuzono and K. Kawasaki, Phys. Rev. E **51**, 1246 (1995).
- [4] K. Kawasaki and T. Okuzono, in *Dynamical Systems and Chaos*, Vol. 2: Physics, eds. Y. Aizawa, S. Saito and K. Shiraiwa (World Scientific, Singapore, 1995)
- [5] L. W. Schwartz and H. M. Princen, J. Colloid Interface Sci. **118**. 201 (1987).

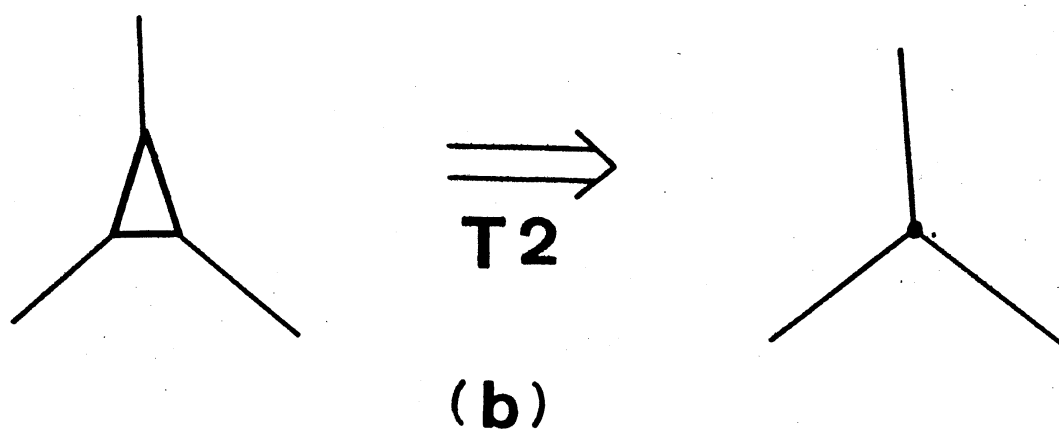
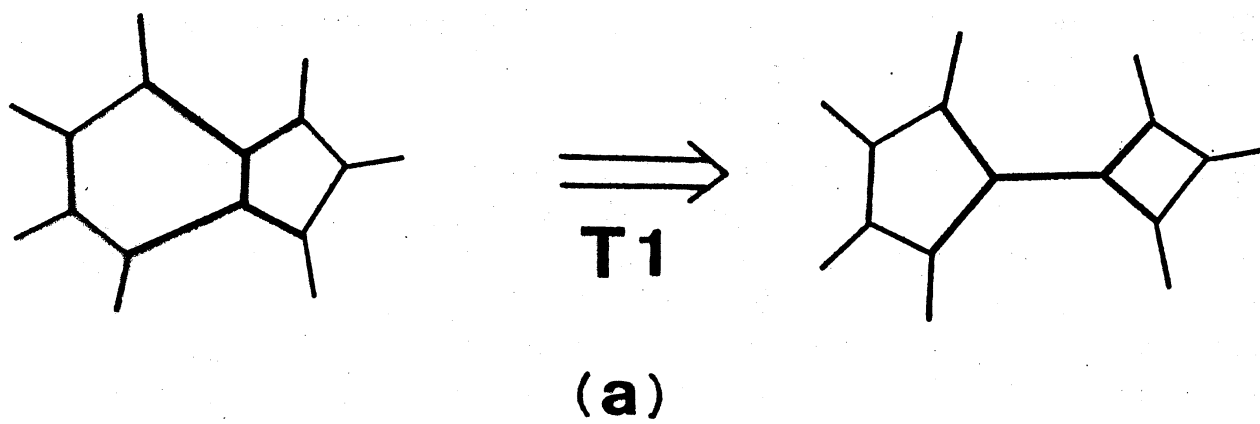
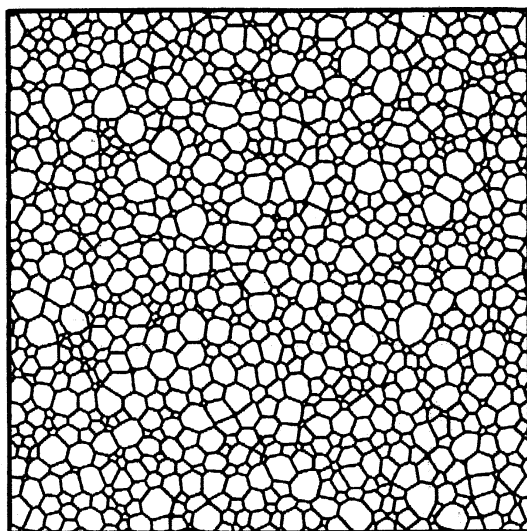
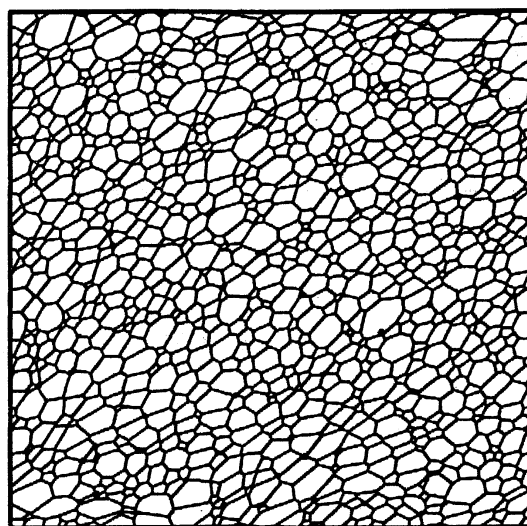


图 1



(a)



(b)

2

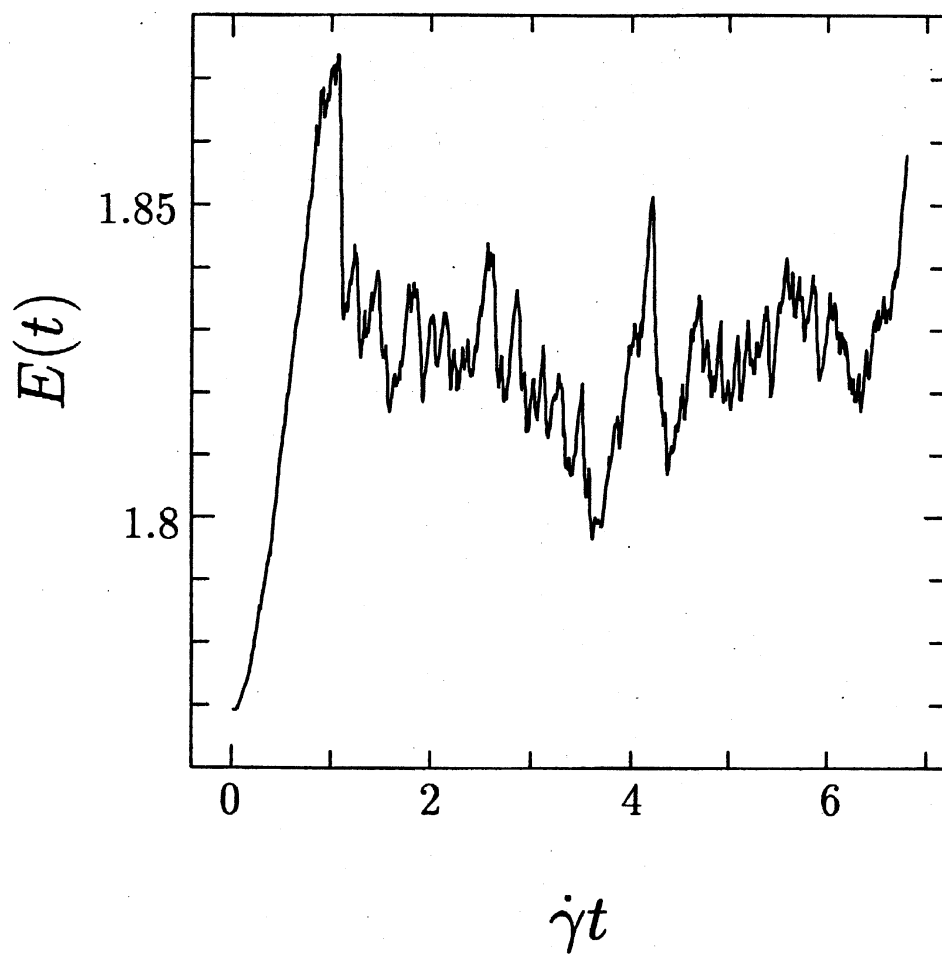


図 3

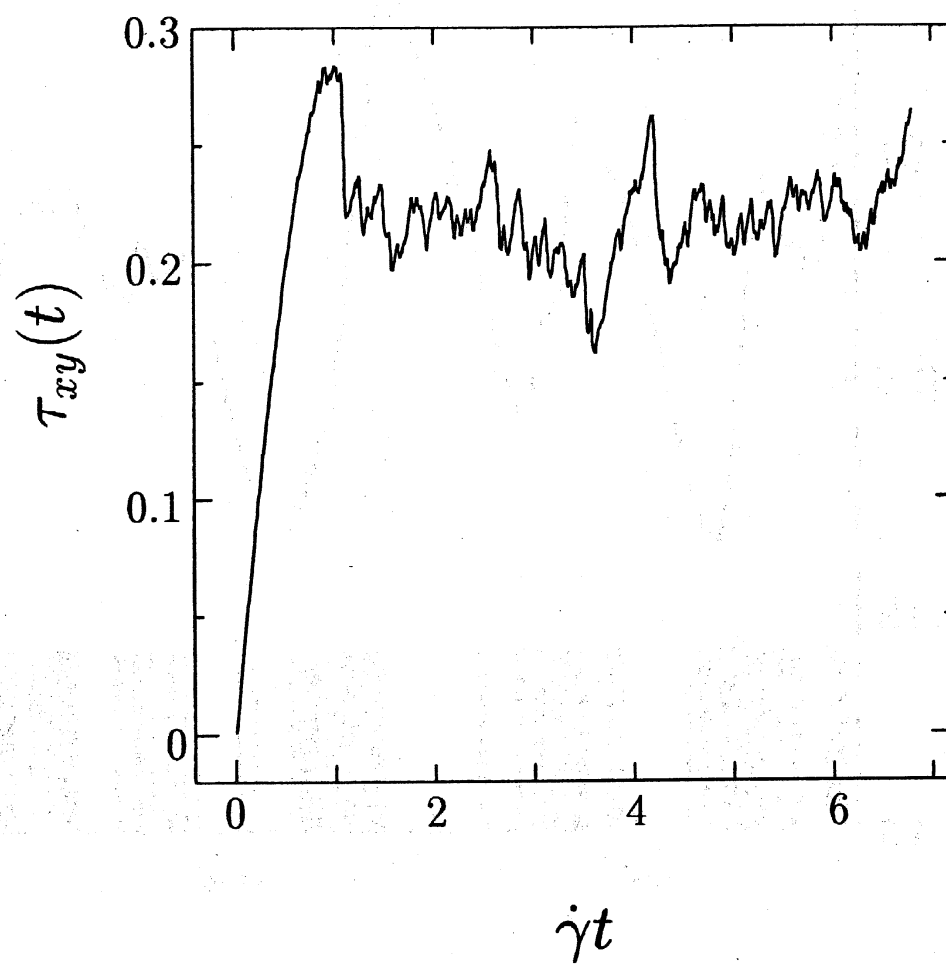


图 4

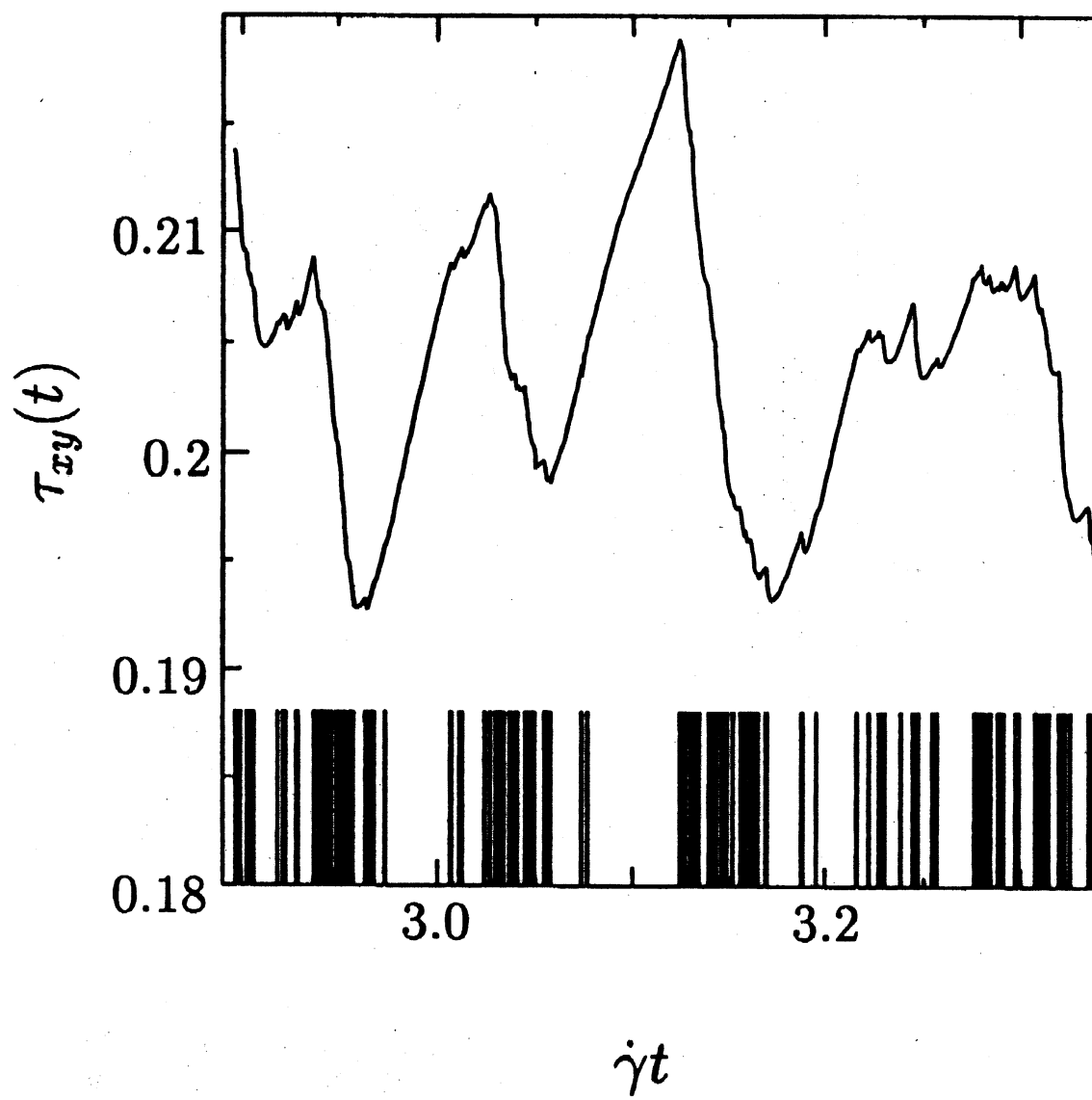


図 5

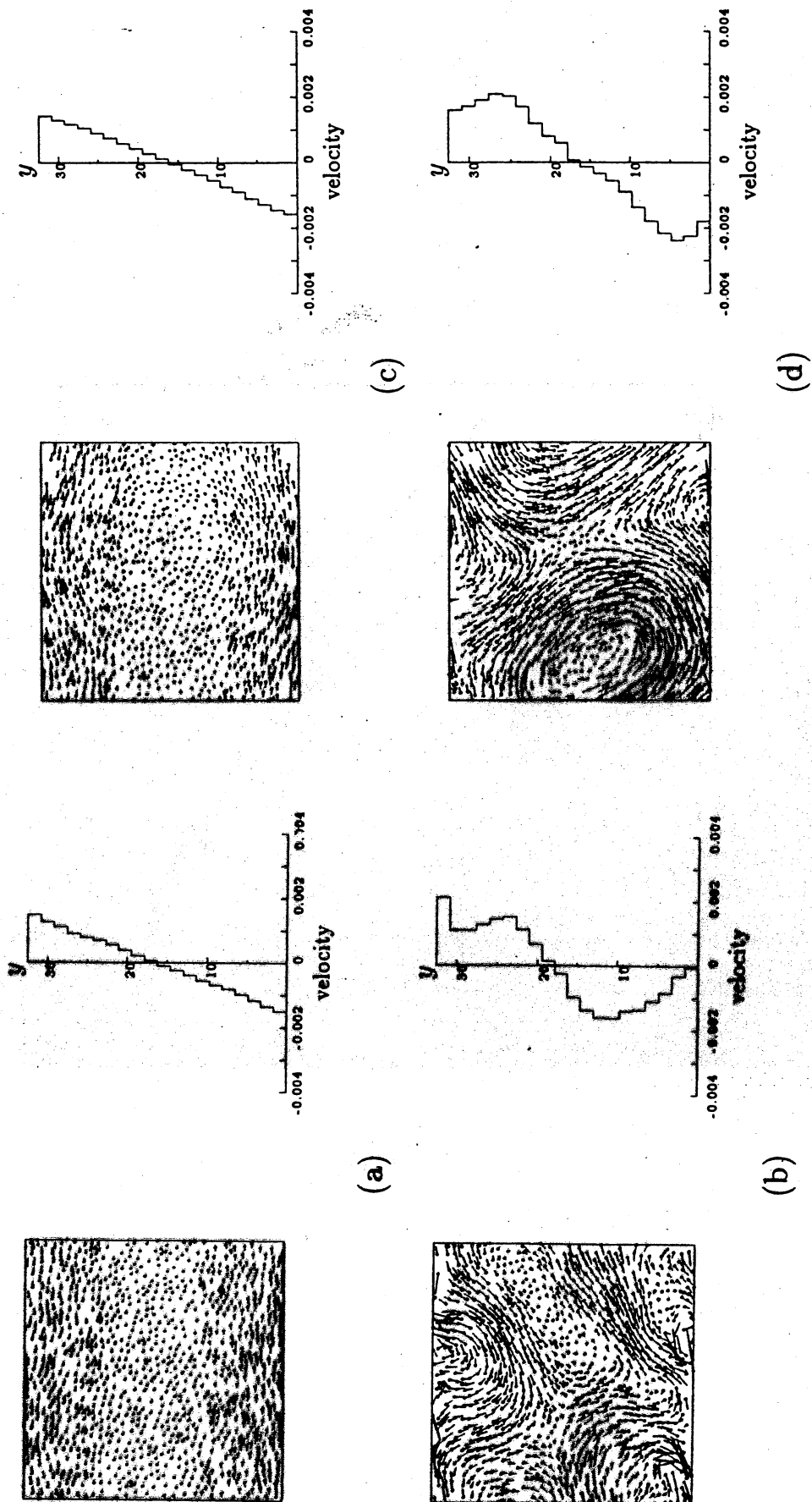


图 6

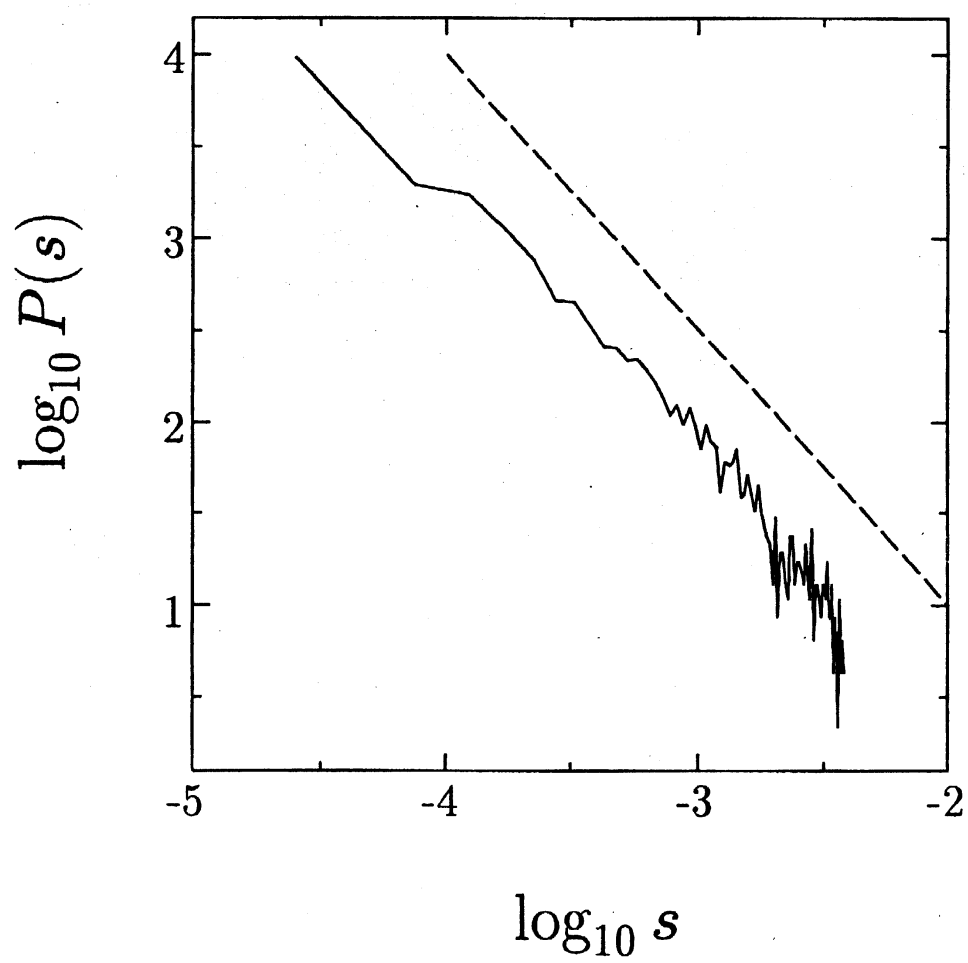
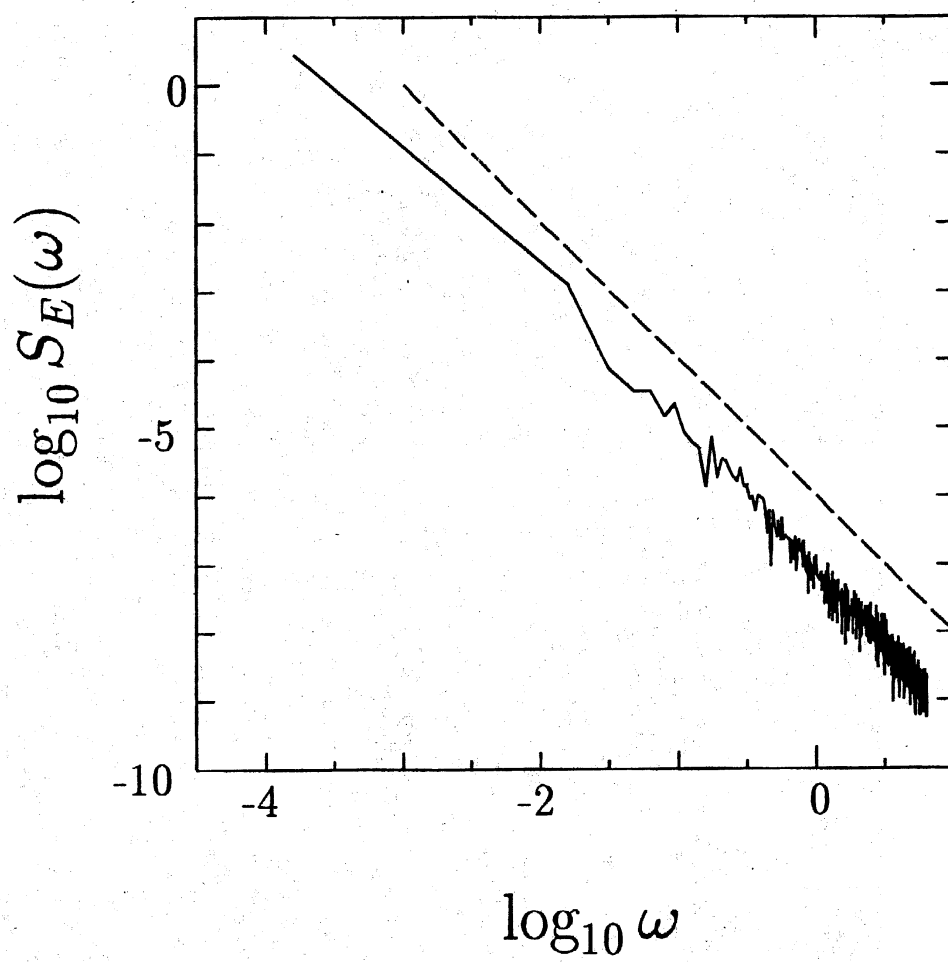
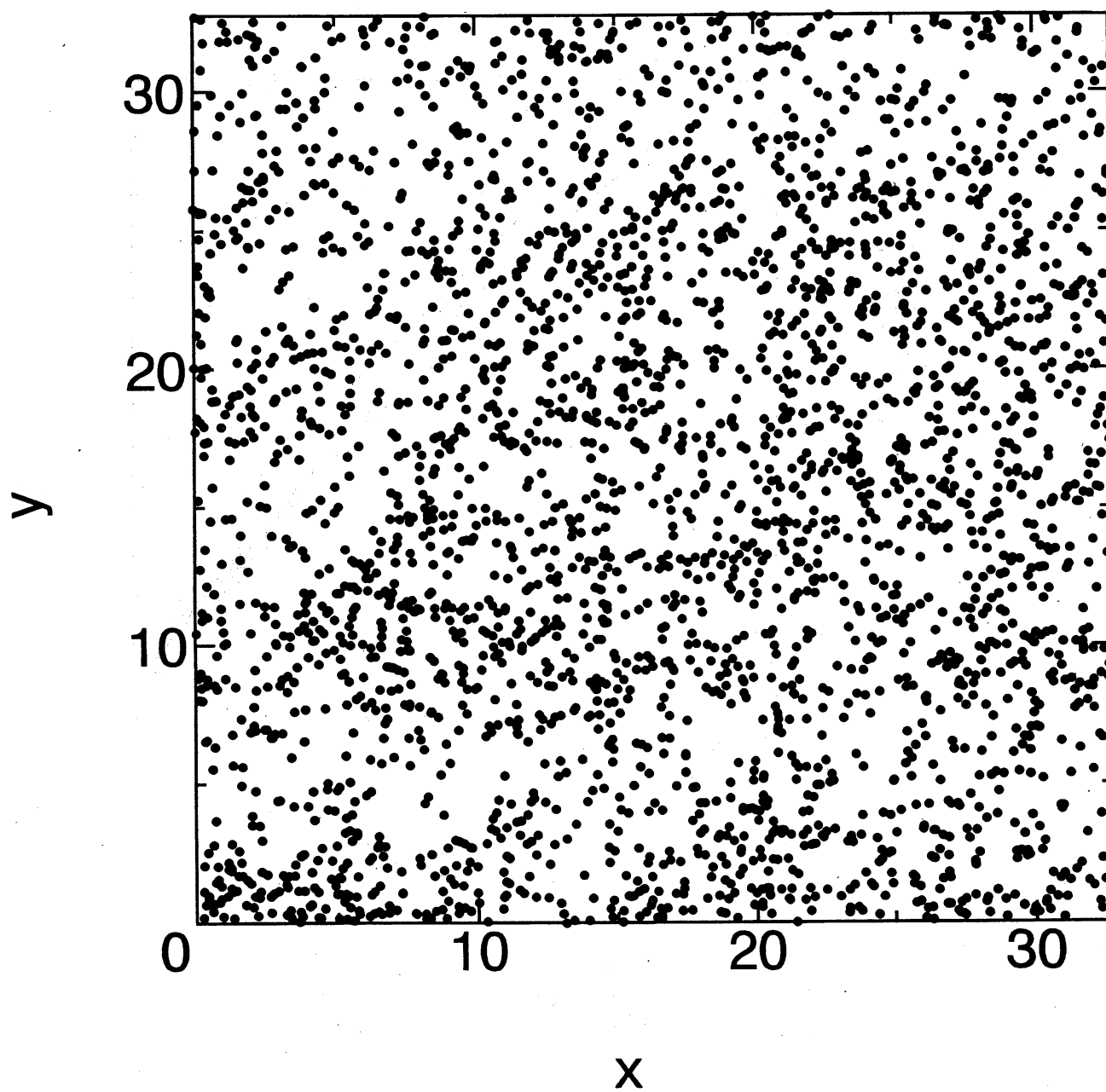


図 7



④ 8

Locations of T1 processes



Locations of T1 during an avalanche

